<u>*T – 4 Derivadas. Aplicaciones de la Derivada.*</u>

EJERCICIOS DE DESARROLLO

1.- Derivada de una Función en un Punto.

1. Halla la tasa de variación media (T. V. M.) de las siguientes funciones en los intervalos [-3, -1]; [0, 2]; [1, 1 + h]:
   a. $f(x)=x^2+1$
   b. $f(x)=7x-5$
   c. $f(x)=3$
   d. $f(x)=2^x$

   ¿En cuáles de ellas es constante la T. V. M.? ¿Qué tipo de funciones son?

2. Halla la T. V. M. de la función $f(x)=-x^2+5x-3$ en el intervalo [2, 2 + h] y, con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.

3. Si $f(x)=x^2$, halla su derivada en $x_0=1$.

4. Si $f(x)=\sqrt[3]{x}$, halla su derivada en $x_0=0$.

5. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:
   a. $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 1 \\ x+2 & si \quad x>1 \end{cases}$ en $x_0=1$.
   b. $f(x)=\begin{cases} 2-3x & si \quad x\le 2 \\ x^2-3 & si \quad x>2 \end{cases}$ en $x_0=2$.
   c. $f(x)=\begin{cases} 2-3x & si \quad x\le 2 \\ x^2-8 & si \quad x>2 \end{cases}$ en $x_0=2$.

6. Dada $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$, halla $f'(2)$ aplicando la definición de derivada.

2.- Función Derivada.

7. Dada la función $f(x)=5x-x^2$:
   a. Halla su función derivada, $f'(x)$, mediante el límite del cociente incremental.
   b. Halla el valor de $f'(-3)$ y $f'(0)$.
   c. Averigua para qué valor de x es $f'(x)=3$ y para qué valor de x es $f'(x)=0$.

8. Obtén la función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ utilizando la definición de derivada.

9. Calcula, aplicando la definición de derivada, $f'(2)$, $f'(-1)$ y $f'(x)$, siendo $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

3.- Reglas de Derivación.

10. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^5$	b. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$	c. $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$
d. $f(x)=\sqrt[3]{7x^2}$	e. $f(x)=x^3-\sqrt{2x}+\dfrac{3}{x}$	f. $f(x)=3^{\sqrt{x}}$
g. $f(x)=5e^{x^2+3x}$	h. $f(x)=\ln\left(x^3-5x^2\right)$	i. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$
j. $f(x)=\ln(\ln x)$	k. $f(x)=3x^4-5x^2+7x+1$	l. $f(x)=\sqrt{3^{x+1}}$
m. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$	n. $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$	o. $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

11. Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:
   a. $y=x^6$
   b. $y=\ln\left(\dfrac{3x^2-1}{4x+3}\right)$
   c. $y=e^{x^2+1}$

12. Averigua para qué valor de x es $f'(x)=0$, y para qué valor de x es $f'(x)=-\dfrac{3}{4}$, siendo $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

13. Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es igual a cero en cada una de las siguientes funciones:

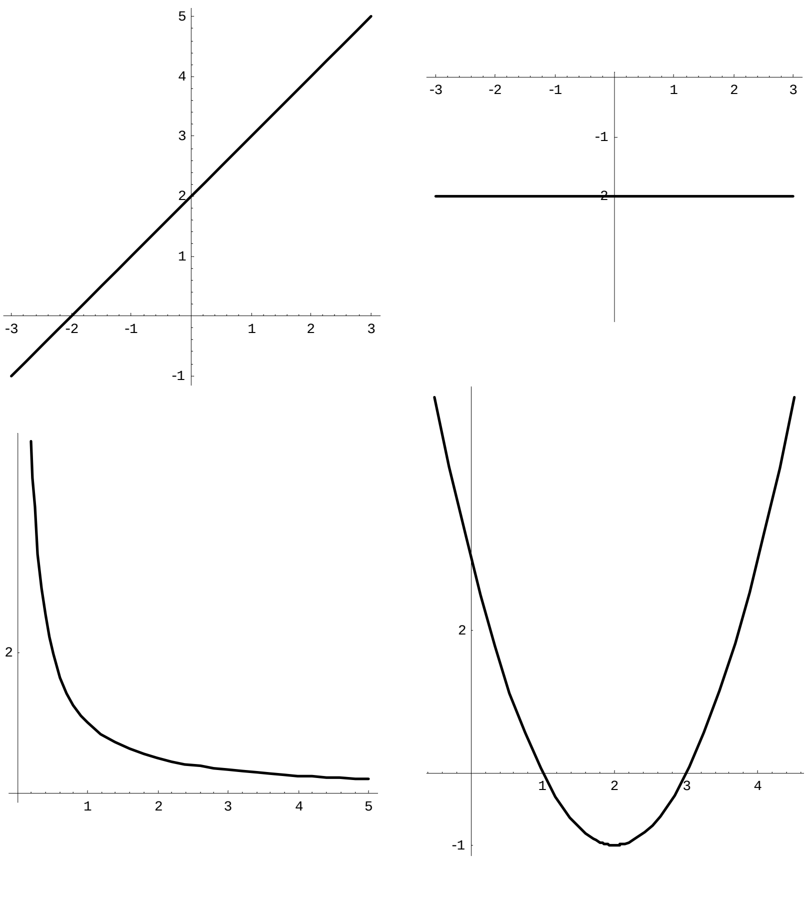
a. $f(x)=\dfrac{x^2(3x-8)}{12}$ b. $f(x)=x^4+2x^2$ c. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

d. $f(x)=e^x(x-1)$ e. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ f. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

g. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ h. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ i. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

j. $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$ k. $f(x)=\ln(x+1)$ l. $f(x)=10-(x-2)^4$

14. Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones *f*, *g*, *h* y *j*:



a. ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos en los que su derivada es cero?
b. ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?
c. ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

4.- Estudio de la derivabilidad utilizando las reglas de derivación.

15. Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & si \quad x \le 3 \\ 3x-9 & si \quad x>3 \end{cases}$.

16. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican, y represéntalas:
    a. $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x<1 \\ x^2+x & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ en $x=1$.
    b. $f(x)=\begin{cases} -x^2 & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$ en $x=0$.
    c. $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x<3 \\ x^2-4 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$ en $x=3$.
    d. $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si \quad x \le 2 \\ 3x+1 & si \quad x>2 \end{cases}$ en $x=2$.

17. Comprueba que $f(x)=\begin{cases} \ln(x-1) & si \quad x<2 \\ 3x-6 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$ es continua, pero no derivable en $x=2$.

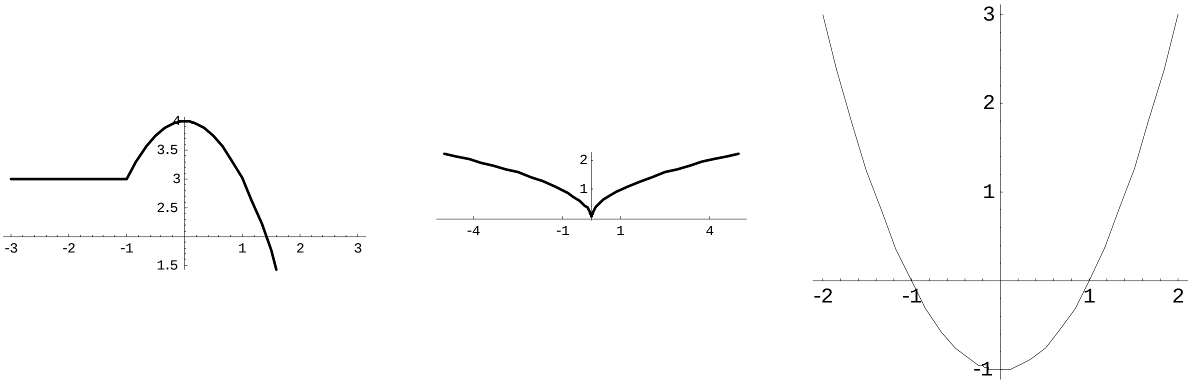
18. Calcula m y n para que $f(x)=\begin{cases} x^2-mx+5 & si \quad x \le 0 \\ -x^2+n & si \quad x>0 \end{cases}$ sea derivable en toda la recta real.

19. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones y represéntalas.
    a. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<2 \\ 2x-4 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$
    b. $f(x)=|x-1|$

20. Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo R:
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si \quad x\le 2 \\ x^2-bx-4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

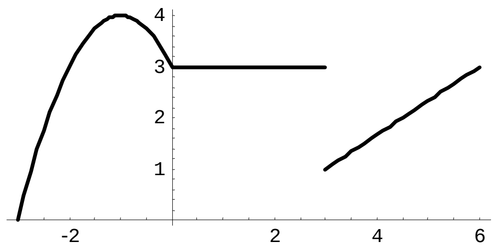
21. La función $f(x)$ está definida por $f(x)=\begin{cases} x^3-x & si \quad x\le 0 \\ ax+b & si \quad x>0 \end{cases}$. Calcula a y b para que dicha función sea continua y derivable.

22. Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:



23. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función
$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1 & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & si \quad x\ge 3 \end{cases}.$$

24. Esta es la gráfica de la función $y=f(x)$. Estudia su continuidad y derivabilidad.



5.- Recta Tangente a una Curva en uno de sus puntos.

25. Halla la ecuación de la recta tangente a $y=\dfrac{x^2-2x}{x+3}$ en $x_0=3$.

26. Halla las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$ en los puntos de abcisas 0, 1, 3.

27. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 + x^2 + 2$ que es paralela a la bisectriz del 1º y 3º cuadrantes.

28. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 4x + 3$ que sean paralelas a la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.

29. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^2 + 5x$ en los puntos x = -1 y x = 2.

30. La función $f(x) = x^2 - 3x^3$ es derivable en toda la recta real. Halla *f'(x)* y escribe la ecuación de la recta tangente a la función *f* en un punto genérico $x = a$. Encuentra los valores de a para que dicha recta tangente sea horizontal.

31. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x + 10$, encuentra el punto, o puntos, $x = a$ para los que la recta tangente a *f* por ellos pasa también por el punto (0, 1).

32. Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

33. Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$ calcula a y b de modo que *f* pase por el punto (-2, -6) y tenga tangente horizontal en ese punto.

34. Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:
    a. $y = \dfrac{1}{x}$ en x = 2.
    b. $y = \dfrac{x+5}{x-5}$ en x = 3.
    c. $y = \ln(x+1)$ en x = 0.

35. Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.

6.- Información Extraída de la Primera Derivada.

36. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:
    a. Dónde crece.
    b. Dónde decrece.

37. Comprueba que la función $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ tiene sólo dos puntos singulares, en $x = 0$ y $x = 6$. Averigua de qué tipo es cada uno de esos puntos singulares.

38. Halla los puntos singulares e identifica el tipo de cada uno de ellos de las siguientes funciones:
    a. $y = -3x^4 + 4x^3$
    b. $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$

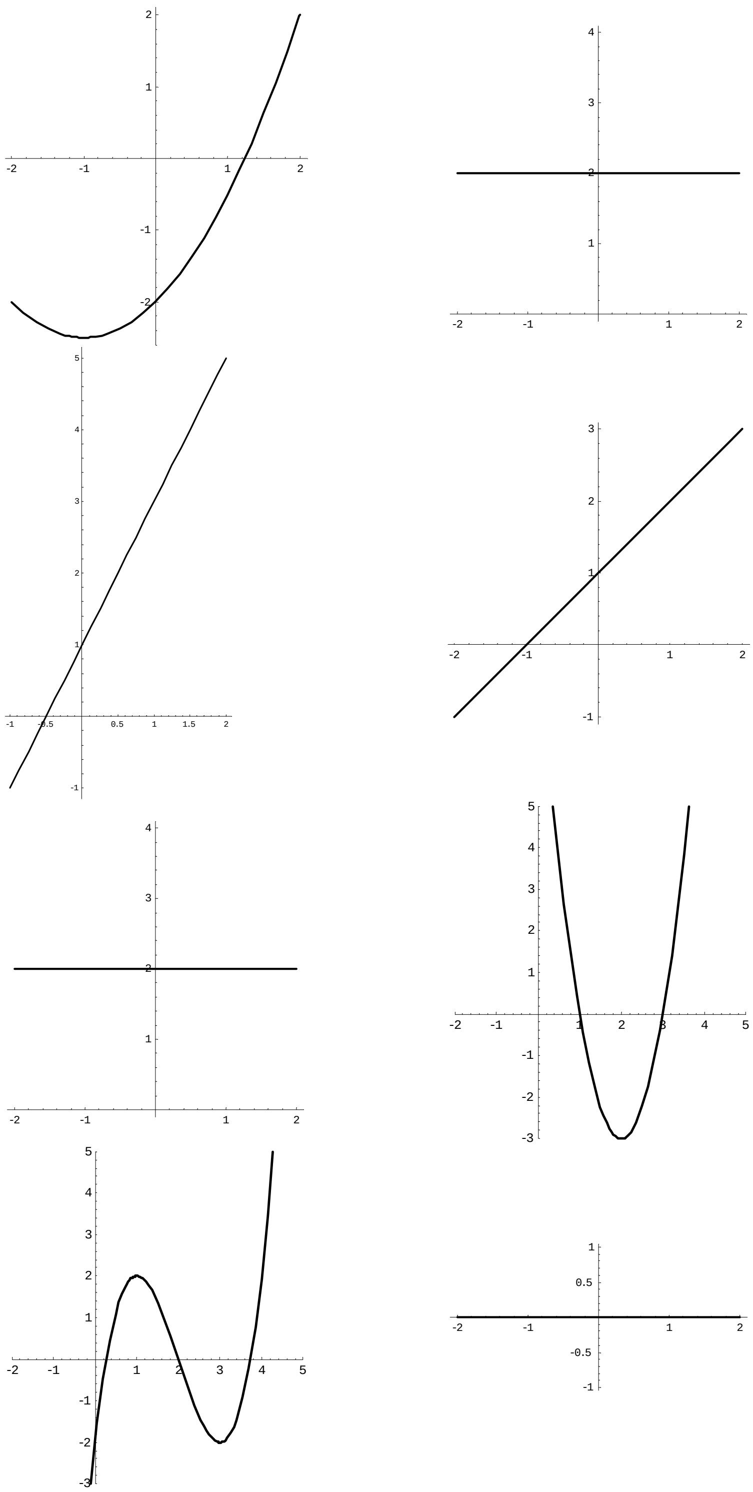
39. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$. ¿Qué relación tienen dichos intervalos con los intervalos de crecimiento de las funciones $g_a(x) = x^3 - 2x^2 + x + a$?

40. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos.
    a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
    b. $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$
    c. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$
    d. $f(x) = \dfrac{4 + 2x^2 - x^3}{x^2}$

41. De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.
    a. Determina *a* y *b*.
    b. Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

42. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto *A*(2, 1) y que pasa por el punto *B*(5, -2).

43. A continuación aparecen gráficas de funciones (en la primera columna) y gráficas de las derivadas de estas funciones (segunda columna). Asocia la gráfica de cada función con la de su derivada:

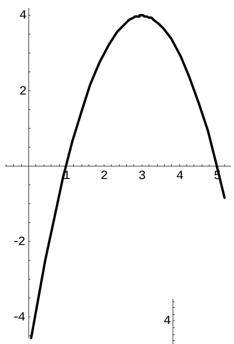


44. De la función $f(x)=x^2+ax+b$ se sabe que:
   - Tiene un mínimo en $x = 2$.
   - Su gráfica pasa por el punto (2, 2)

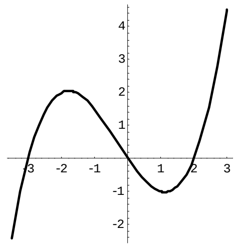
   Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuánto vale la función en $x = 1$?

45. Calcula p y q de modo que la curva $y=x^2+px+q$ contenga al punto (-2, 1) y presente un mínimo en $x = -3$.

46. Esta es la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explica si $f(x)$ tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.



47. Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.
   a. Indica el signo que tendrá $f'(x)$ en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$ y $(1,+\infty)$.
   b. ¿En qué puntos la gráfica de $f'(x)$ cortará al eje OX?



7.- Información Extraída de la Segunda Derivada.

48. Estudia la curvatura de las siguientes funciones:
   a. $y=3x^4-8x^3+5$
   b. $y=x^3-6x^2+9x$

49. Halla los puntos de inflexión y estudia la concavidad de estas funciones:
   a. $f(x)=x^4-6x^2$
   b. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

50. Halla los máximos, mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

   a. $f(x)=x^3-3x^2+9x+22$ b. $f(x)=\dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ c. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

   d. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ e. $f(x)=e^x(x-1)$ f. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

51. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 12x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

52. Estudia los intervalos de crecimiento y de concavidad de las siguientes funciones:
    a. $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$
    b. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$
    c. $f(x) = e^{-3x}$

8.- Optimización de Funciones.

53. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, *R(x)*, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad que se invierte, *x*, en miles de euros, por medio de la siguiente expresión $R(x) = -0.001x^2 + 0.04x$:
    a. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir para obtener la máxima rentabilidad?
    b. ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

54. De todas las fincas con forma rectangular y con superficie 40 000 metros cuadrados, encuentra las dimensiones de la que tenga perímetro mínimo.

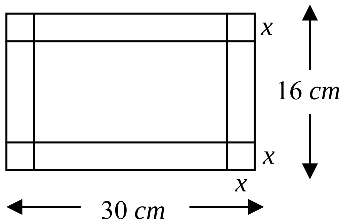
55. La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$. Se define la función de coste medio por unidad como $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. ¿Cuál debe ser la producción para que sea mínimo el coste medio por unidad?

56. La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar, en miles de euros, x medido en años.
    a. Realiza una representación gráfica aproximada de la función teniendo en cuenta el dominio válido del contexto del problema.
    b. ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
    c. ¿Perderá dinero la empresa en algún momento? ¿Es posible que llegue un momento en que no tenga beneficios ni pérdidas? Razona tu respuesta.

57. Halla dos números reales y positivos cuya suma sea 100 y su producto sea lo mayor posible.

58. Halla dos números reales no negativos cuyo producto sea 25 y cuya suma sea lo menor posible.

59. Una caja sin tapa se construye con un rectángulo de 16 cm de ancho y 30 cm de largo, cortando un cuadrado de cada una de las esquinas y doblando los lados resultantes.



60. El saldo, en millones de €, de una empresa en función del tiempo viene dado por la función:

$$f(t)=\begin{cases} 4-0{,}2t & \text{si} \quad 0\le t<4 \\ 3{,}2+0{,}04(t-4) & \text{si} \quad 4\le t<8 \\ 3{,}36+0{,}1(t-8)^2 & \text{si} \quad 8\le t\le 12 \end{cases}$$

Deduce razonadamente el valor de t en el que el capital fue máximo.

61. Un depósito abierto de chapa y de base cuadrada debe tener capacidad para 13500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que se precise en su construcción la menor cantidad de chapa?

Problemas de Selectividad (no es tan fiero el león como lo pintan).

62. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si } x\le 2 \\ x^2-6x+10 & \text{si } 2<x<5 \\ 4x-15 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$.

63. El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilogramos de un artículo viene dado por la función:

$$B(x)=-0.01x^2+3.6x-180$$

a. Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
b. Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

64. Determine los valores de *a* y *b* para que sea derivable la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-3 & si \quad x\le 1 \\ 2bx-4 & si \quad x>1 \end{cases}$$

65. Dada la función $f(x)=-x^3+3x$, obtén las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de la función que tienen pendiente cero y di cuáles son los puntos de tangencia.

66. Sea $f(t)=\begin{cases} -t^3+5t^2 & \text{si } 0\le t\le 3 \\ -t^2+12t-9 & \text{si } 3\le t\le 5 \\ 2t+16 & \text{si } 5<t\le 10 \end{cases}$.

   a. Estudia la continuidad y derivabilidad de *f* en $t = 3$ y $t = 5$.
   b. Razona si *f* posee algún punto de inflexión y, en caso afirmativo, calcúlalo.

67. Sea *x*, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra. Sea $f(x)=2-\dfrac{4}{x+1}$, para $x\ge 0$, la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola. ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

68. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si } x\le 2 \\ x^2-6x+11 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

   a. Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule sus extremos.
   b. ¿Existe algún punto donde la pendiente de la recta tangente a su gráfica sea cero? En caso afirmativo, determine cuál es.

69. Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$.

   a. Halle el valor de los coeficientes de *a*, *b* y *c*, si se sabe que en el punto (0, 0) su gráfica posee un extremo relativo y que el punto (2, -16) es un punto de inflexión.
   b. Para $a = 1$, $b = 1$ y $c = 0$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -2$.

70. Sea la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$.
   a. Halle los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a $y=-3x+3$
   b. Calcule los máximos y mínimos de *f*.

71. Halle los valores de *a* para los que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si } x<-1 \\ -x^2+a & \text{si } -1\le x<1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si } 1\le x \end{cases}$

   es continua y derivable. Para *a* = 4 halle los extremos relativos.

72. Calcula las funciones derivadas de las siguientes:
   a. $f(x)=\dfrac{e^{5x}}{x^3-1}$
   b. $f(x)=4x\cdot L(3x+1)$
   c. $f(x)=(x^2-1)(x^3+2x)$
   d. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

73.
   a. Sea la función $f(x)=\dfrac{a}{x}+bx^2$. Calcule los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f* tenga un extremo relativo en el punto (1, 3).
   b. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x\cdot Lx$ en el punto de abscisa 1.

74. El número medio de clientes que visita un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por la función $f(x)=x^3-42x^2+576x-2296$, en función de la hora *x*, siendo $11\le x\le 20$.
   a. Halle los extremos relativos de esta función.
   b. Determine las horas en las que crece el número medio de clientes.
   c. Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

75.
   a. Sea la función $f(x)=x^2+ax+b$. Calcule *a* y *b* para que su gráfica pase por el punto (0, –5) y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta $y=-4x$.
   b. Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función *g* cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 1).

76.

a. Sea la función $f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+b & \text{si} \quad x\le 2 \\ a(x-3)^2+3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$. Halle *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en $x = 2$.

b. Halle la función derivada de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

77. Sea la función $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{x}{4} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$.

a. Estudie su continuidad y derivabilidad.
b. Calcule sus extremos.

78. Sea la función $f(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$.

a. Estudie su continuidad y derivabilidad.
b. Determine los máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

79. Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1<x\le 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

80. Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función $B(t)=t^3-9t^2+24t$, t indica el tiempo, en años, $0\le t\le 5$. En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

81. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x\le 4 \\ x^2-9x+21 & \text{si } x>4 \end{cases}$.

a. Estudie su continuidad y derivabilidad.
b. Determine los máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como su crecimiento y decrecimiento.

82. Sea la función $f(x)=\begin{cases} -4x-3 & \text{si } x\leq -1 \\ 2x^2-1 & \text{si } -1<x<1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$. Calcule el valor del parámetro *k* para que la función sea continua en toda la recta real y estudie su derivabilidad para el valor de *k* obtenido.

83. Sea la función $f(x)=2x^3+ax^2-12x+b$.
   a. Halle *a* y *b* para que la función se anule en *x* = 1 y tenga un punto de inflexión en $x=-\dfrac{1}{2}$.
   b. Para *a* = -3 y *b* = 2, calcule sus máximos y mínimos relativos.

84. Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f:[0,45]\to R$ cuya expresión analítica es $f(t)=7.2t-0.16t^2$, donde *t* es el tiempo, expresado en minutos.
   a. ¿Cuál es el rendimiento máximo del jugador?
   b. ¿En qué momento lo consigue?
   c. ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

85.
   a. Halle la función derivada de la función $f(x)=L\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.
   b. Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2$.

86. Sea la función $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa *x* = 0.

87. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<1 \\ -x^2+4x-2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$.
   a. Analice su continuidad y su derivabilidad.
   b. Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.

88. Sea la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.
   a. Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.
   b. Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.

89. Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado):
   a. $f(x) = \frac{3x-1}{x} - (5x - x^2)^2$.
   b. $g(x) = (x^2 - 1) \cdot L\,x$.
   c. $h(x) = 2^{5x}$.
   d. $i(x) = (x^3 - 6x) \cdot (x^2 + 1)^3$.

90.
   a. Calcule la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
   b. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$?
   c. Sea $g(x) = 2x^2 - 8x + a$. Halle *a* para que el valor mínimo de *g* sea 3.

91.
   a. Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{si} \quad x \le 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.
   b. Calcule la derivada de $g(x) = (x+1) \cdot e^{2x+1}$.

92. La temperatura *T*, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo *t*, en horas, por la expresión:

$$T(t) = 40t - 10t^2 \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 4.$$

   a. Determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.
   b. ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

93.
   a. Halle los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto $(-2, 3)$.
   b. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 2$ en su punto de inflexión.

94.

a. Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).

b. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{2}{x}+L\,x$ en el punto de abscisa $x=1$.

95. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$.

a. Estudie su continuidad y derivabilidad.

b. Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

EJERCICIOS DE SINTESIS

1. Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las siguientes funciones:

   a. $f(x)=\dfrac{3x-2}{7}$ b. $f(x)=x^2-4$

   c. $f(x)=(x-5)^2$ d. $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$

2. Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:

   a. $f(x)=\dfrac{5x+1}{2}$ b. $f(x)=3x^2-1$

   c. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ d. $f(x)=x^2-x$

3. Halla las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x)=\dfrac{3x}{(1+2x)^3}$ b. $f(x)=\sqrt{3x^2-5x}$ c. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

   d. $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ e. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ f. $f(x)=\dfrac{x+1}{(2-x)^2}$

   g. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ h. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ i. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$

   j. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x+\sqrt{x}}$ k. $f(x)=\left(0.5-\dfrac{x}{10}\right)^4$

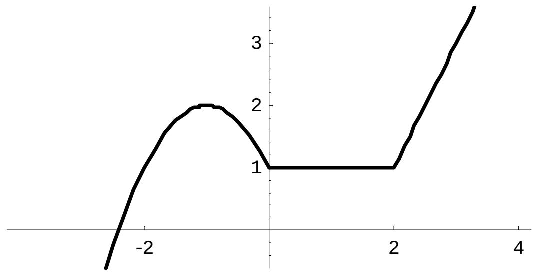
4. Considera la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad 0\le x<1 \\ x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$.

   a. Estudia su continuidad.
   b. Estudia su derivabilidad.

5. Calcula el valor de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-x & si \quad x<-1 \\ ax^2+bx & si \quad x\ge -1 \end{cases}$ sea derivable.

6. Prueba que la función $f(x)=|x+1|$ no es derivable en $x=-1$.

7. Esta es la gráfica de la función $y=f(x)$. Observándola, di el valor de $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$. ¿En qué puntos no es derivable?



8. Dada la función $f(x)=x^2+4$, encuentra el punto, o puntos, $x=a$ para los que la recta tangente a f por dichos puntos pasa también por el origen de coordenadas.

9. Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:
    a. $y=\sqrt{x+12}$ en $x=-3$.
    b. $y=x\ln x$ en $x=e$.

10. Halla las tangentes a la curva $y=\dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x+y=0$.

11. Calcula la función derivada de $f(x)=x^3-4x^2+1$ y halla:
    a. Las pendientes de las rectas tangentes en las abcisas -1, 1 y 3.
    b. Las ecuaciones de dichas rectas.
    c. Las abcisas de los posibles máximos y mínimos relativos.
    d. ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x=2$?

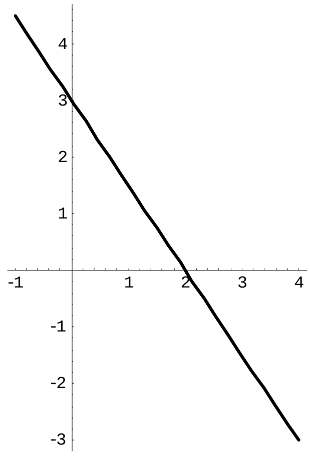
12. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

    a. $f(x)=\dfrac{3}{x-5}$ b. $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

    c. $h(x)=\dfrac{5x^2}{x^2+4}$ d. $A(x)=x{\cdot}e^{-x}$

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si \quad x\le 1 \\ x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$:
    a. Halla su función derivada.
    b. ¿Tiene la función algún punto en que su derivada se anule?
    c. Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
    d. Escribe la ecuación de la recta tangente a f en $x=0$?

14. Halla los coeficientes a, b, c y d de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es $y=-3x+3$, y que la función tiene un extremo relativo en $x = 0$.



15. Observando la gráfica de la función $f'(x)$, derivada de $f(x)$, halla:
    a. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
    b. ¿Tiene $f(x)$ máximo o mínimo?

16. Halla los máximos, mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\ln(x+1)$ b. $f(x)=xe^x$ c. $f(x)=x^4-2x^3$

d. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)(x-4)}$ e. $f(x)=x^4-6x^2$ f. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

17. El coste total de fabricación de q unidades de cierto artículo es $C(q)=3q^2+5q+75$ euros:
    a. Halla la función *M(q)* que nos da el coste medio por unidad.
    b. ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?
    c. Calcula *C(q)* y *M(q)* para el valor de *q* hallado en el apartado anterior.

18. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm., halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.

19. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m., ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

20. Se sabe que el rendimiento *r*, en %, de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t)=300t(1-t)$ siendo $0\le t\le 1$, *t* en horas.
    a. Explica cuando aumenta y cuando disminuye el rendimiento.
    b. ¿Cuándo se anula?
    c. ¿Cuándo es máximo?

21. Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora. La función que expresa dicho rendimiento es $R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$ siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio de la jornada laboral.
Determina cuándo se produce el máximo rendimiento y cuándo se produce el mínimo.

22. Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular, aprovechando una tapia ya existente, es decir, necesitará cercar solo tres lados del rectángulo.
Halla las dimensiones de la cerca para la que el área encerrada es máxima.